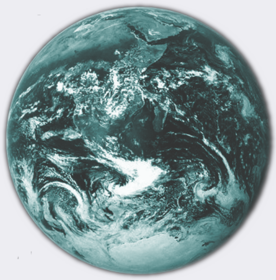
Differentialligninger



Den italienske videnskabsmand Galileo Galilei (1564-1642) sagde engang „Matematik er naturens sprog“. Man kommer måske nærmere sandheden ved at sige “Differentialligninger er naturens sprog“. Med andre ord næsten alt, hvad der kan sanses eller måles i denne verden, kan beskrives med differentialligninger. f.eks. stoffers bevægelse, økonomisk vækst eller overbefolkning. Emnet er *utroligt* omfattende – og lige så spændende.

Indhold

Dette pdf-dokument kan med fordel, bruges sammen med bogen: „Gymnasie-matematik“, ISBN: 978-87-991996-0-0
Hent en GRATIS kopi på www. STUDIENOTER.DK

0.1 1. ordens differentialligning

DEFINITION Differentialligning

En differentialligning er en ligning, hvor den ubekendte størrelse er en funktion $f(x)$, og hvor funktions differentialkvotient $\frac{df(x)}{dx}$ indgår.

EKSEMPEL: $$\frac{df(x)}{dx} = 2 \cdot x + 1$$

DEFINITION Løse en differentialligning

At løse en differentialligning vil sige at finde regneforskriften for de *funktioner*, som gør ligningen sand.

EKSEMPEL: $$\frac{df(x)}{dx} = 2 \cdot x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + c \quad , \quad c \text{ er et tal.}$$

Den engelske videnskabsmand Isaac Newton (1642-1727) må have tænkt: Temperaturen (T) af teen falder ΔT i tidrummet Δt, altså er afkølingshastigheden $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, eller set over et (uendeligt) lille tidsrum: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$ Afkølingshastigheden afhænger af forskellen mellem teens temperatur og omgivelsernes temperatur (T_o), Mon ikke:

$$\frac{dT}{dt} = h \cdot (T - T_o) \quad , \quad h \text{ er en konstant}$$

Denne differentialligning kaldes *Newtons afkølingslov*

METODE **Løsning ved integration (kvadratur)**

Differentialligningen:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

har løsningerne :

$$f(x) = G(x) + c$$

$g(x)$ er en given funktion, $G(x)$ er en stamfunktion til $g(x)$ og c er en vilkårlig konstant.

EKSEMPEL: $$\frac{df(x)}{dx} = cos(x) \Leftrightarrow f(x) = sin(x) + k$$

DEFINITION **Rand- / begyndelses-betingelser**

En differentialligning har (uendelig) mange løsninger $f(x)$; men i praksis er man ofte interesseret i *en* bestemt en af dem. Man må derfor på forhånd vide noget om den søgte løsning. I ovenstående differentialligning skal man kende funktionens værdi for en bestemt x-værdi. Den løsning man søger, skal altså opfylde en betingelse. Man kalder det for en rand- eller begyndelsesbetingelsen.

EKSEMPLER: Givet: $\frac{df(x)}{dx} = x$ og $f(2) = 5$

Samtlige løsninger er $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + k$

Den søgte løsning er $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 3$ da $f(2) = 5 \Rightarrow k = 3$

Definition Homogen 1. ordens differentiallign.

En *homogen lineær 1. ordens differentialligning med konstant koefficient* kan skrives på formen:

$$\frac{df(x)}{dx} + k \cdot f(x) = 0$$

Det kryptiske navn skyldes:

Homogen:	$f(x)$ indgår i alle led
Lineær:	I ligningen indgår f *ikke* i en sammensat funktion (f.eks. $[f(x)]^2$)
1. orden:	$\frac{df}{dx}$ er f differentieret 1 gang
Konst. koef.:	k er en konstant

Sætning Homogen 1. ordens differentiallign.

Den *homogene lineære 1. ordens differentialligning med konstant koefficient*:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} + k \cdot f(x) = 0}$$

Har løsningerne:

$$\boxed{f(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot x}}$$

Hvor k er en given konstant og c er et vilkårligt tal ($c \in \mathbb{R}$).

Eksempel: $$\frac{df(x)}{dx} + 7 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^{-7 \cdot x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

DEFINITION **Inhomogen 1. ordens differentiallign.**

En *inhomogen lineær 1. ordens differentialligning med konstant koefficient* kan skrives på formen:

$$\frac{df(x)}{dx} + k \cdot f(x) = g(x)$$

Hvor $g(x)$ er en given funktion og k en given konstant. Ligningen kaldes inhomogen fordi $f(x)$ ikke indgår i alle led.

EKSEMPEL: Newtons afkølingslov: $\frac{dT}{dt} - h \cdot T = -h \cdot T_o$ er en inhomogen lineær 1. ordens differentialligning.
T svarer til f, k svarer til $-h$, t svarer til x og $g(x) = -h \cdot T_o$

METODE **Gæt en løsning**

En løsning $\phi(x)$ til den inhomogene differentialligning ligner ofte $g(x)$. Her er nogle eksempler:

$g(x)$	$\phi(x)$
$a \cdot x + b$	$A \cdot x + B$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$A \cdot x^2 + B \cdot x + C$
$a \cdot sin(b \cdot x)$	$A \cdot sin(C \cdot x) + B \cdot cos(C \cdot x)$
$a \cdot cos(b \cdot x)$	$A \cdot sin(C \cdot x) + B \cdot cos(C \cdot x)$
$b \cdot a^{c \cdot x}$	$B \cdot a^{C \cdot x}$

a, b og c er givne konstanter. A, B og C findes ved at indsætte gættet $\phi(x)$ i differentialligningen.

Se eksemplet på næste side →

EKSEMPEL: $\dfrac{df(x)}{dx} + 2 \cdot f(x) = x$ d.v.s. $k = 2,\ g(x) = x$

Gæt: $\phi(x) = A \cdot x + B$ d.v.s. $\dfrac{d\phi(x)}{dx} = A$

Indsat i ligningen: $A + 2 \cdot (A \cdot x + B) = x \Leftrightarrow 2 \cdot A \cdot x + A + 2 \cdot B = x$

Sandt hvis: $2 \cdot A = 1$ og $A + 2 \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$ og $B = -\frac{1}{4}$

$\phi(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$ er altså løsning til differentialligningen.

SÆTNING **Inhomogen 1. ordens differentiallign.**

Den *inhomogen lineær 1. ordens differentialligning med konstant koefficient*:

$$\frac{df(x)}{dx} + k \cdot f(x) = g(x)$$

Har løsningerne:

$$f(x) = \phi(x) + c \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot x}$$

Hvor $\phi(x)$ er én *vilkårlig* løsning til den inhomogene differentialligning, og c er et vilkårligt tal.

EKSEMPEL: $\dfrac{df(x)}{dx} + 2 \cdot f(x) = x$

Fra forrige eksempel har vi: $\phi(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$.

Samtlige løsninger er: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4} + c \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot x}$

0.2 2. ordens differentialligning

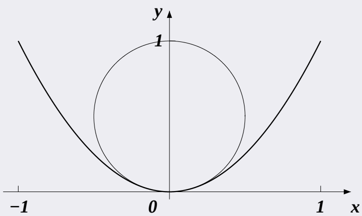
DEFINITION **Den 2. afledede**

Differentialkvotienten af differentialkvotienten af en funktion $f(x)$ kaldes *den 2. afledede af* f, og har symbolet:

$$\frac{d^2f[x)}{dx^2} \qquad \text{eller} \qquad f''(x)$$

BEMÆRK: 3., 4., 5., ... afledede kan defineres på tilsvarende måde.

EKSEMPEL: $f(x) = x^3 \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 3 \cdot x^2 \Rightarrow \frac{d^2f[x)}{dx^2} = 6 \cdot x$



Du husker sikkert, at den 1. afledede (differentialkvotienten) angiver tangentens stigningstal. Den 2. afledede kan derimod sige noget om grafens krumning.
Radius af den cirkel som bedst følger en grafs krumning omkring et punkt, kaldes krumningsradien (r).
Hvis funktionen $f(x)$ har vandret tangent i x_0 gælder:

$$\left|\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}\right| = \frac{1}{r} \qquad \text{hvis } \frac{df(x_0)}{dx} = 0$$

DEFINITION Differentialligningens orden

En differentiallignings orden svarer til den højeste afledede af funktionen $f(x)$, der findes i ligningen.

EKSEMPLER:

$$\frac{df(x)}{dx} + 4 \cdot f(x) = 2 \cdot x + 1 \qquad \text{1. ordens differentialligning}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 3 \cdot \frac{df(x)}{dx} = sin(x) \qquad \text{2. ordens differentialligning}$$

DEFINITION Homogen 2. ordens differentiallign.

En *homogen lineær 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter* kan skrives på formen:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k_1 \cdot \frac{df(x)}{dx} + k_2 \cdot f(x) = 0$$

Hvor k_1 og k_2 er en givne konstanter.

EKSEMPEL: $\quad 2 \cdot \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} - 4 \cdot \dfrac{df(x)}{dx} + 6 \cdot f(x) = 0$

kan omskrives til $\quad \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2 \cdot \dfrac{df(x)}{dx} + 3 \cdot f(x) = 0$

D.v.s. $k_1 = -2$ og $k_2 = 3$

EKSEMPEL: $\quad \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} - \dfrac{df(x)}{dx} = 0 \qquad k_1 = -1$ og $k_2 = 0$

Sætning Homogen 2. ordens differentiallign.

Den *homogene lineære 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter*:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + k_1 \cdot \frac{df(x)}{dx} + k_2 \cdot f(x) = 0$$

Har karakterligningen $R^2 + k_1 \cdot R + k_2 = 0$, som er en 2.gradsligning med diskriminanten $D = k_1^2 - 4 \cdot k_2$. Hvis:

$D > 0$ $R_1 = \frac{-k_1+\sqrt{D}}{2}$ og $R_2 = \frac{-k_1-\sqrt{D}}{2}$

$$f(x) = c_1 \cdot e^{R_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{R_2 \cdot x}$$

$D = 0$ $R_1 = R_2 = \frac{-k_1}{2}$

$$f(x) = e^{R_1 \cdot x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

$D < 0$ $\alpha = \frac{-k_1}{2}$ og $\beta = \sqrt{k_2 - \alpha^2}$

$$f(x) = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x + c_2)$$

k_1 , k_2 er en givne konstanter. c_1 , c_2 er vilkårlige tal.

Eksempel: $$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + 4 \cdot f(x) = 0$$

Da $k_1 = 0$ og $k_2 = 4$ er $D = 0^2 - 4 \cdot 4 = -16 < 0$

d.v.s. $\alpha = \frac{-0}{2} = 0$ og $\beta = \sqrt{4 - 0^2} = 2$

Så løsningerne er: $f(x) = c_1 \cdot \sin(2 \cdot x + c_2) \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

DEFINITION **Inhomogen 2. ordens differentiallign.**

En *inhomogen lineær 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter* kan skrives på formen:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k_1 \cdot \frac{df(x)}{dx} + k_2 \cdot f(x) = g(x)$$

Hvor $g(x)$ er en given funktion. k_1 og k_2 er givne konstanter.

SÆTNING **Inhomogen 2. ordens differentiallign.**

Løsningerne til den inhomogen lineær 2 ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k_1 \cdot \frac{df(x)}{dx} + k_2 \cdot f(x) = g(x)$$

er summen af én *vilkårlig* løsning $\phi(x)$ til ligningen og samtlige løsninger til den *homogene* differentialligning (se forrige side):

$$f(x) = \phi(x) + \begin{cases} c_1 \cdot e^{R_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{R_2 \cdot x} & D > 0 \\ e^{R_1 \cdot x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x) & D = 0 \\ c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x + c_2) & D < 0 \end{cases}$$

BEMÆRK: I mange tilfælde vil $\phi(x)$ ligne $g(x)$, derfor kan man ofte gætte en løsning – Se „Gæt en løsning“ i forrige afsnit.

Se eksemplet på næste side →

EKSEMPEL: $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2 \cdot \dfrac{df(x)}{dx} + f(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x}$

d.v.s. $k_1 = -2$, $k_2 = 1$ og $g(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x}$

▲ *Én løsning til den inhomogene differentialligningen*:

Gæt: $\phi(x) = B \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x}$

$$\Rightarrow \frac{d\phi(x)}{dx} = B \cdot C \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x} \Rightarrow \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = B \cdot C^2 \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x}$$

Indsat i ligningen: $B \cdot C^2 \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x} - 2 \cdot B \cdot C \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x} + B \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x} = 3 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x}$

Venstre side omskrives: $\left(B \cdot C^2 - 2 \cdot B \cdot C + B\right) \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x} = 3 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x}$

Sandt hvis: $C = 4$ og $B \cdot C^2 - 2 \cdot B \cdot C + B = 3$

$\Rightarrow B = \dfrac{1}{3}$ og $C = 4$

$\phi(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x}$ er én løsning

▲ *Samtlige løsninger til den homogene differentialligning*:

Karakterligningen: $R^2 - 2 \cdot R + 1 = 0$

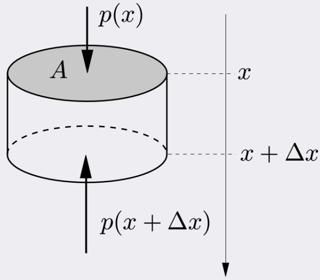
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0 \qquad R_1 = R_2 = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

Samtlige løsninger til den homogene ligning: $\mathrm{e}^x \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$

▲ *Samtlige løsninger til den inhomogene differentialligning*:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot x} + \mathrm{e}^x \cdot (c_1 + c_2 \cdot x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

0.3 Vandsøjletryk



Fra svømmehallen ved vi, at trykket (p) er en funktion af vanddybden (x). Vi vil nu udlede regneforskriften $p(x)$.
Forestil dig en lille afgrænset del af vandet med form som en lodret cylinder med massen m og endefladearealet A.
På cylinderens overside er trykket $p(x)$. Et lille stykke Δx længere nede, på cylinderens underside, er trykket $p(x+\Delta x)$. I lodret retning påvirkes cylinderen desuden af tyngdekraften $m \cdot g$. Da cylinderen ligger stille, giver Newtons 2. lov:

$$m \cdot g + p(x) \cdot A - p(x + \Delta x) \cdot A = 0 \quad \text{hvor} \quad g = 9,8 \tfrac{N}{kg}$$

Cylinderens volumen (V) er $A \cdot \Delta x$, derfor ganges med Δx:

$$m \cdot g \cdot \Delta x + p(x) \cdot V - p(x + \Delta x) \cdot V = 0$$

Benyttes, at densiteten er $\rho = m/V$, kan ligningen skrives:

$$\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \rho \cdot g$$

Hvis vi forestiller os, at Δx bliver meget lille, har vi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \rho \cdot g$$

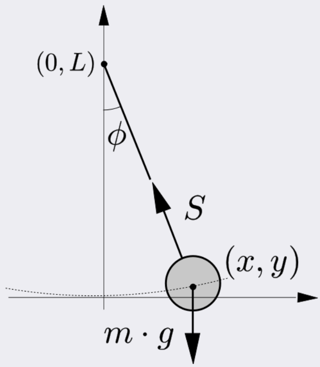
D.v.s. venstresiden er en differentialkvotient, hvilket giver os differentialligningen:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \rho \cdot g$$

Løsningen, som kan findes ved integration (kvadratur), er:

$$p(x) = \rho \cdot g \cdot x + K$$

0.4 Matematisk pendul



Et lod med massen m ophængt i en (masseløs) snor med længden L, kaldes et matematisk pendul. Vi vil nu bestemme pendulets svingningstid (T).

Loddet påvirkes til enhver tid (t) af snorkraften (S) og tyngdekraften ($m \cdot g$), så Newtons 2. lov giver i x- og y-retning:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -S \cdot \sin(\phi) \text{ og } m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = S \cdot \cos(\phi) - m \cdot g$$

For at komme videre *antager* vi, at svingningerne er små, hvilket giver: $\cos(\phi) \approx 1$, $\sin(\phi) \approx tan(\phi) \approx \phi$, hvis ϕ måles i radian. Da loddets lodrette bevægelse stort set er nul, er $\frac{d^2y}{dt^2} \approx 0$.

Med god tilnærmelse får vi:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -S \cdot \phi \quad \text{og} \quad 0 = S - m \cdot g$$

Bruger vi desuden, at $tan(\phi) = \dfrac{x}{L} \approx \phi$, får vi flg. 2.ordens differentialligning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot x = 0$$

Karakterligningen er $R^2 + \frac{g}{L} = 0$ d.v.s. $D = -\frac{4 \cdot g}{L} < 0$

Hvilket giver løsningen:

$$x(t) = c_1 \cdot sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t + c_2\right)$$

Som er regneforskriften for en harmonisk svingning med svingningstiden:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$